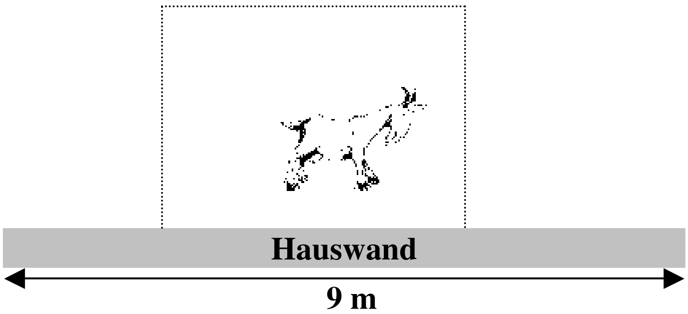
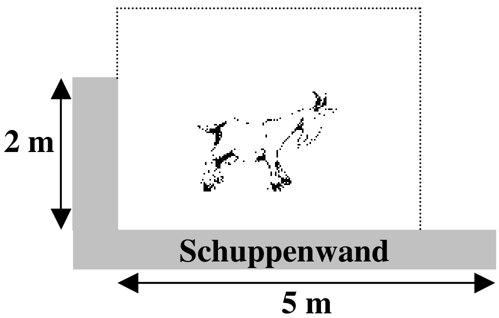
ARBEITSBLATT ZUR ZIEGENPROBLEMATIK

Aufgabe 1: Schneider Böck möchte eine möglichst große Wiese für seine Ziege abzäunen. Dafür hat er sich 16 m Zaun gekauft. Wie muss er die Länge und Breite der Wiese wählen, um eine möglichst große Wiese zu erhalten?

Aufgabe 2: „So ein Blödsinn“, denkt sich Schneider Böck. Ich kann doch viel besser meine Hauswand für die Einzäunung mit benutzen. Wie muss er die Länge und Breite der Wiese jetzt wählen, damit die Ziege möglichst viel zu fressen hat? Ihm stehen nach wie vor 16 m Zaun zur Verfügung.



Aufgabe 3: Das Ergebnis reicht Herrn Böck nicht aus. Da fällt ihm ein, dass er am Schuppen die Möglichkeit hätte, Zaun zu sparen, da er dort zwei Wände zur Verfügung hätte. Wie muss er nun Länge und Breite der Wiese wählen, um eine möglichst große Fläche abzustecken?

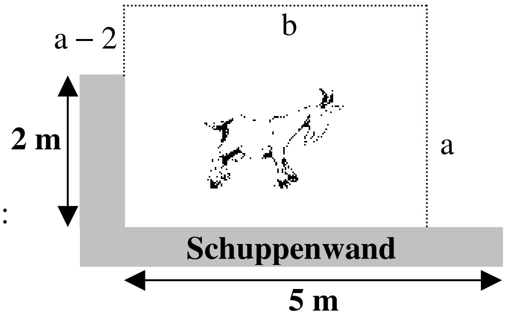


Aufgabe 4: Nach dem dritten Einzäunungsversuch hat die (wahnsinnig intelligente und der deutschen Sprache mächtige) Ziege die Nase voll. „Jetzt reicht's! Ich brauche unbedingt 50 m^2 Wiese zum Fressen, sonst werde ich nicht satt.“ Und da die Ziege zu allem Überfluss auch noch sehr anhänglich ist sagt sie: „Außerdem will ich direkt an deinem Haus stehen, sonst bin ich todunglücklich.“
Wie viel Zaun muss Schneider Böck mindestens kaufen, um seiner Ziege diesen Gefallen zu tun?
Hinweis: Verwende die Skizze aus Aufgabe 2.

Und so lebten Schneider Böck und seine gefräßige Ziege glücklich bis an ihr Lebensende. Und wenn sie nicht gestorben sind, dann zäunen sie noch heute ein...

Lösung zu Aufgabe 3:

Gesucht ist der maximale Flächeninhalt, wobei nur 16 m Zaun verwendet werden dürfen.
Der Flächeninhalt berechnet sich durch die Formel $A = a \cdot b$, wobei b die Breite und a die Länge der Wiese sein soll.
Außerdem wissen wir, dass $(a - 2) + b + a = 16$ ist, da der Bauer nur 16 m Zaun zur Verfügung hat.



$$(a-2)+b+a=16$$
$$\Leftrightarrow 2a+b-2=16$$
① $$\Leftrightarrow b=18-2a$$

Daraus ergibt sich für den Flächeninhalt:
$$A=a\cdot b=a\cdot(18-2a)=18-2a^2$$
D. h. der Flächeninhalt hängt nur noch von der Wahl der Länge a ab:

② $$A(a)=18a-2a^2$$

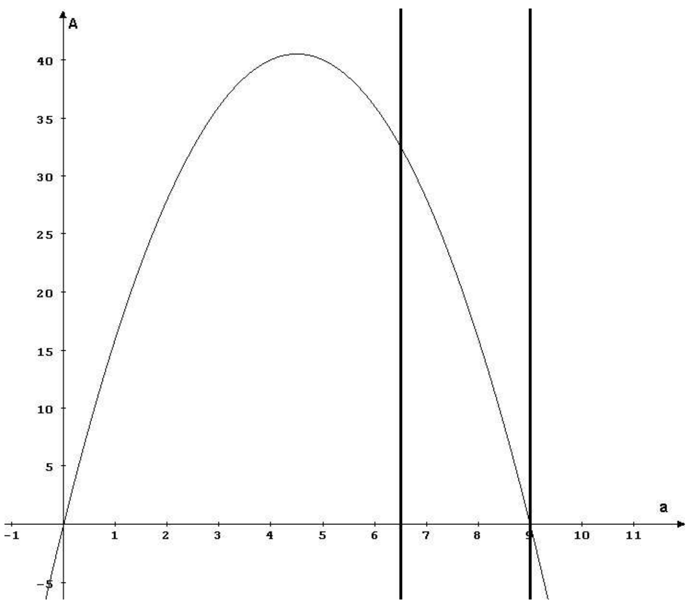
Suchen wir zuerst die lokalen Extrema:
Notwendige Bedingung für Extremstellen ist
$$A'(a)=18-4a=0$$
$$\Leftrightarrow 18=4a$$
$$\Leftrightarrow a=4{,}5$$
Hinreichende Bedingung für Extremstellen ist $A''(a)=-4\neq 0$. Dies ist für a = 4,5 erfüllt, so dass bei $a = 4{,}5$ ein lokales Extremum vorliegt.

Mit Hilfe der Formel ① ergibt sich: $b=18-2\cdot 4{,}5=18-9=9$.
Da allerdings die Schuppenwand nur 5 m lang ist, muss b im Intervall [0 ; 5] liegen. Das bedeutet allerdings, dass a auch nicht alle beliebigen Werte annehmen darf:
Für $b = 0$ ergibt sich aus der Formel ① die Länge $a = 9$ m.
Für $b = 5$ ergibt sich aus der Formel ① die Länge $a = 6{,}5$ m.
D. h., dass a nur die Werte im Intervall [6,5 ; 9] annehmen darf. Das globale Extremum kann also nur an den Randwerten für $a = 9$ oder $a = 6{,}5$ angenommen werden.

Für $a = 9$ ergibt sich aus der Formel ② der Flächeninhalt $A = 0\ \text{m}^2$.
Für $a = 6{,}5$ ergibt sich aus der Formel ② der Flächeninhalt $A = 32{,}5\ \text{m}^2$.

Insgesamt gilt also: Die größte Wiese erhält man, indem man sie 5 m breit und 6,5 m lang einzäunt.
Der maximale Flächeninhalt beträgt in diesem Fall $A = 32{,}5\ \text{m}^2$.

Der folgende Graph veranschaulicht den Zusammenhang zwischen der Länge a und dem Flächeninhalt A. Man erkennt deutlich, dass das globale Maximum am Rand (a = 6,5) angenommen wird.

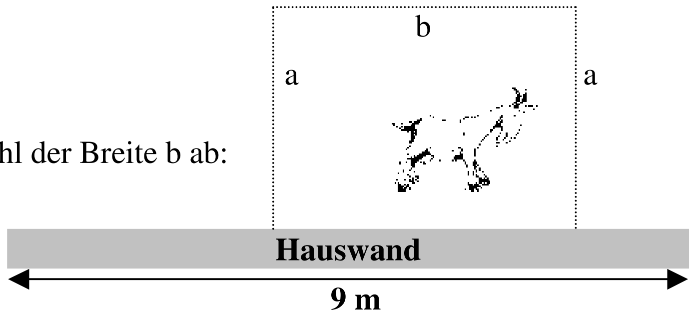


Lösung zu Aufgabe 4:

Gesucht ist der minimale Zaunverbrauch, wobei eine Fläche von 50 m^2 eingezäunt werden soll.
Der Zaunverbrauch berechnet sich durch die Formel $Z = 2a + b$, wobei b die Breite und a die Länge der Wiese sein soll.
Außerdem wissen wir, dass $A = a \cdot b = 50$ ist, da die Wiese 50 m^2 groß sein soll.

$$a \cdot b = 50$$

$$① \quad \Leftrightarrow a = \frac{50}{b}$$



Daraus ergibt sich für den Zaunverbrauch:

$$Z = 2a + b = \frac{100}{b} + b$$

D. h. der Zaunverbrauch hängt nur noch von der Wahl der Breite b ab:

$$② \quad Z(b) = \frac{100}{b} + b$$

Suchen wir zuerst die lokalen Extrema:
Notwendige Bedingung für Extremstellen ist

$$Z'(b) = -\frac{100}{b^2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{100}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = 100 \Leftrightarrow b = \pm 10$$

D. h. für $b = 10$ wäre die benötigte Zaunlänge am kleinsten. Leider ist aber die Hauswand nur 9 m lang, so dass für b nur Werte im Intervall [0 ; 9] in Frage kommen. Das globale Minimum wird also an einem der Randwerte angenommen.

Für $b = 0$ ist die Zaunlänge nicht definiert (siehe Formel ②)

Für $b = 9$ ergibt sich aus der Formel ② die Zaunlänge $Z = 20\frac{1}{9}$ m. Außerdem ergibt sich aus der Formel ① die Länge der Wiese $a = \frac{50}{9}m = 5\frac{5}{9}m$.

Insgesamt gilt also: Die kleinste Zaunlänge erhält man, indem man die Wiese 9 m breit und $5\frac{5}{9}$ m lang einzäunt. Die minimale Zaunverbrauch beträgt in diesem Fall $Z = 20\frac{1}{9}$ m.

Der folgende Graph veranschaulicht den Zusammenhang zwischen der Breite b und der Zaunlänge Z. Man erkennt (hoffentlich?!?), dass das globale Minimum am Rand (b = 9) angenommen wird.